

# Vorlesung - Analysis und Geometrie endlicher Graphen - WiSe 20/21

Dr. Marcel Schmidt, marcel.schmidt@math.uni-leipzig.de

**Inhalt:** In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit diskreten Schrödingeroperatoren und deren Spektrum (die Menge der Eigenwerte). Solche Operatoren (lineare Abbildungen) werden von endlichen gewichteten Graphen induziert. Ein besonderer Fokus liegt auf dem Zusammenspiel zwischen der Geometrie des Graphen und Eigenschaften des Spektrums. Dazu lernen wir Sätze und Methoden kennen, die (mit etwas mehr Arbeit) auch für kontinuierliche Schrödingeroperatoren gelten.

Konkret gliedert sich die Vorlesung in folgende Abschnitte:

1. *Grundlegendes zu Graphen und diskreten Schrödingeroperatoren.* Hier geht es um grundlegende Begriffe und um die Berechnung der Eigenwerte von konkreten Beispielen. Insbesondere diskutieren wir das Spektrum der Adjazenzmatrix von Cayleygraphen endlicher abelscher Gruppen. Dazu tauchen wir etwas in deren Darstellungstheorie ein.
2. *Wieso Spektraltheorie?* Der zweite Abschnitt beschäftigt sich am Beispiel der diskreten Wärmeleitungsgleichung und des Markovoperators mit der Frage “Why care?”, also warum das Spektrum diskreter Operatoren interessant ist. Es stellt sich heraus, dass die spektrale Lücke, also der Abstand zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Eigenwert, eine wichtige Rolle spielt.
3. *Die spektrale Lücke.* Hier geht es um eine Abschätzung für die spektrale Lücke, die sogenannte Cheeger-Buser-Ungleichung, und ihre Konsequenzen. Außerdem untersuchen wir, warum reguläre Graphen mit großer spektraler Lücke sehr “zufällig” sind.
4. *Expanderfamilien.* In diesem Abschnitt geht es um Familien (Folgen) von Graphen mit uniform großer spektraler Lücke und uniform kleinen Vertexgrad, sogenannte Expanderfamilien. Wir beschäftigen uns damit wie groß die spektrale Lücke für Familien regulärer Graphen überhaupt sein kann (Satz von Alon-Boppana und Satz von Serre) und warum es überhaupt Restriktionen gibt. Dazu benötigen wir einen kleinen Exkurs in die Spektraltheorie von Operatoren auf  $\ell^2$  um den unendlichen  $d$ -regulären Baum zu untersuchen. Schließlich zeigen wir mit etwas Stochastik die Existenz von Expanderfamilien.
5. *Die Colin de Verdière Invariante und planare Graphen.* Die Colin de Verdière Invariante

eines Graphen ist die maximal mögliche Vielfachheit des zweitkleinsten Eigenwertes gewisser assoziierter diskreter Schrödingeroperatoren. Wir untersuchen diese Invariante und werden zeigen, dass planare Graphen genau die Graphen sind, deren Colin de Verdière Invariante kleiner gleich 3 ist. Dazu beweisen wir auch Wagners klassische Charakterisierung planarer Graphen durch verbotene Minoren.

**Zielgruppe:** Die Vorlesung richtet sich an Studierende im Diplomstudiengang und in den Lehramtsstudiengängen Mathematik.

**Voraussetzungen:** Kenntnisse in linearer Algebra und Analysis, wie sie in den Grundvorlesungen vermittelt werden. Für die Beispiele werden endliche Gruppen und diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen benötigt. Der Hilbertraum  $\ell^2$  und gewöhnliche Differentialgleichungen tauchen jeweils an einer Stelle auf.

**Modus:** Aufgrund der Pandemie plane ich die Vorlesung im Modus “Betreutes lesen des Coronaskriptes” mittels BigBlueButton. Sie bekommen ausführliche Notizen zur Vorlesung (das Coronaskript) und wir lesen pro Woche einen Teil davon. Dazu gebe ich ihnen jede Woche ca. 45 - 60 Minuten eine grobe Einordnung des Stoffes, ohne zu sehr auf Beweise und Details einzugehen. Bis zur nächsten Sitzung haben sie Zeit um das Material durchzuarbeiten, in welcher wir dabei auftretende Fragen oder aufwändigere Beweise besprechen.

**Zeit:** Montag 15:15 - 16:45 und Mittwoch 9:15 - 10:45 per BigBlueButton. Alle Sessions werden auch aufgezeichnet und sind später abrufbar. Bitte melden Sie sich über Moodle an.