

## Vorlesung WiSe 20/21

### Ergodentheorie I

Man betrachte die ersten Ziffern der Zahlen der Folge  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , also

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, ...

Wie groß ist die asymptotische Häufigkeit  $h_c$  der Ziffer  $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$  in obiger Folge? Mit Werkzeugen aus der Ergodentheorie kann man errechnen, dass  $h_c = \log \frac{c+1}{c}$  gilt. Also kommt die 1 am häufigsten vor, die 9 am seltensten (die erste 9 kommt erst an der Stelle 53 vor!).

Die Ergodentheorie geht auf Boltzmann's "Ergodenhypothese" aus dem Jahr 1885 zurück. Diese besagt in etwa, dass sich in einem thermodynamischen System alle möglichen Phasenraum-Regionen irgendwann erreicht werden, und die durchschnittliche Verweildauer in einer Phasenraum-Region ist proportional zu deren Volumen.

Hieraus hat sich die Ergodentheorie als eigenständige mathematische Disziplin dynamischer Systeme entwickelt. Zahlreiche Anwendungen finden sich z.B. in der Stochastik, Funktionalanalysis, Spektraltheorie und wie oben angedeutet, in der Zahlentheorie.

In der Vorlesung studieren wir zunächst topologische und maßtheoretische dynamische Systeme und ihre Eigenschaften, darunter vor allem Minimalität, Ergodizität und Rekurrenz. Im weiteren Verlauf beweisen wir Ergodenkonvergenzsätze mit einfachen Anwendungen auf zahlentheoretische Fragen (wie oben). Abschließend beschäftigen wir uns mit der schwierigen Frage nach der Existenz von arithmetischen Progressionen in gewissen Teilmengen von  $\mathbb{N}$  und beweisen einen Spezialfall.

**Voraussetzungen:** Grundstudium und Basiskenntnisse in Funktionalanalysis.

**Termin:** ab 26.10. jeweils Mo 11:15-12:45 und Di 9:15-10:45 in A-314 (in Präsenzphasen).

**Modus:** Die Vorlesung kann als Online-Kurs besucht werden. Darüber hinaus sollen innerhalb der dann aktuell geltenden Regelungen so viele Präsenzphasen wie möglich stattfinden. Bei Interesse schreiben Sie sich bitte in den moodle2-Kurs "Ergodentheorie" ein. Weitere Informationen werden dort rechtzeitig gegeben.

**This course can also be given in English.**

**In case of any questions, just send an email.**

## Literatur

- [1] Manfred Einsiedler and Tom Ward. *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics 259, Springer-Verlag London, 2011.
- [2] Tanja Eisner, Bálint Farkas, Markus Haase, Rainer Nagel. *Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics 272, Springer-Verlag Cham, 2015.
- [3] Hillel Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. Princeton University Press, Princeton NJ, 1981.
- [4] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1982.